ОТЗЫВ
официального оппонента на диссертационную работу
Паршина Максима Игоревича
" Исследование некоторых математических моделей
движения термовязкоупругих жидкостей ",
представленную на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук
по специальности 01.01.02 - "Дифференциальные уравнения,
динамические системы и оптимальное управление"

Диссертационная работа Паршина М.И. посвящена исследованию начально-краевых задач для некоторых плоских математических моделей движения термовязкоупругих сплошных сред.

Как известно, значительная часть работ математической гидродинамики относится к идеальной и ньютоновской жидкостям. Основными математическими моделями здесь служат классические задачи для уравнений Эйлера (идеальная жидкость) и Навье-Стокса (вязкая жидкость). Они изучались Ж.Лере, О.А.Ладыженской, В.И.Юдовичем и др. Однако многие реальные среды, например, полимерные растворы, кровь, битум и т.д. по многим свойствам похожи на вязкую жидкость, но не описываются упоминавшимися выше моделями. Такого рода среды (жидкости), называемые неньютоновскими, рассматривались в работах Дж. Максвелла, Кельвина, Фойгта, Дж. Г. Олдройда, А.П. Осколкова, В.В. Пухначева и др.

В диссертации речь идет о несжимаемых неньютоновских жидкостях с вязкими и упругими свойствами. При этом в исследуемых моделях помимо механических факторов учитываются и явления, связанные с процессом теплопередач, т.е. рассматриваются модели термовязкоупругих жидкостей.

Изучению математических проблем моделей движения термовязкоупругих сплошных сред посвящены работы таких авторов, как I. Pawlow, L. Consiglieri, E. Bonetti, E. Bonfanti, В.Г. Звягин, В.П. Орлов и др.

Как известно, в гидродинамике исследователи по тем или иным причинам нередко обращаются к двумерным (и даже к n-мерным) моделям среды. Такой подход может представлять существенный интерес, помимо чисто математического, при изучении различных реальных течений (например, плоскопараллельных, осесимметричных течений и т. д.)

Диссертационная работа Паршина М.И. посвящена, как было уже сказано, исследованию начально-краевых задач для плоских (двумерных) моделей термовязкоупругих сплошных сред. Согласно вышесказанному актуальность темы диссертации не вызывает сомнений.

В диссертации установлено существование нелокальных слабых решений для системы термовязкоупругости типа Олдройда (см.(1)), а также для такой системы с памятью вдоль траекторий движения, отнесенных к регуляризованной модели. При достаточно гладких данных доказана нелокальная (по времени) сильная разрешимость системы термовязкоупругости Навье-Стокса-Фурье-Олдройда (см.(2)).

Остановимся кратко на содержании диссертации.

Диссертация занимает 103 страницы текста и состоит из списка обозначений, введения, четырех глав и библиографии из 70 наименований.

В главе 1 приводятся вспомогательные известные результаты анализа, используемые в математической гидродинамике и необходимые для изложения результатов.

В главе 2 исследуется начально-краевая задача в цилиндре $Q_T = [0,T]\times\Omega$, где Ω — ограниченная область, динамики термовязкоупругой среды типа Олдройда

$$\begin{aligned}&\frac{\partial v}{\partial t} + v_i\frac{\partial v}{\partial x_i} - \mathrm{Div}[\mu_1(\theta)\varepsilon(v)] - \mu_0\Delta v - \\ &- \mu_2\int_0^t \mathrm{Div}[\varepsilon(v)(s,x)]ds + \nabla p = f; \\ &\mathrm{div}\ v = 0\end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned}&v\big|_{t=0} = v^0 \text{ на } \Omega,\ v\big|_{\partial\Omega} = 0 \text{ на } [0,T]; \\ &\frac{\partial\theta}{\partial t} + v_i\frac{\partial\theta}{\partial x_i} - \chi\Delta\theta = (\mu_0 + \mu_1(\theta))\varepsilon(v) : \varepsilon(v) + \\ &+ \mu_2\int_0^t \mathrm{Div}[\varepsilon(v)(s,x)]ds : \varepsilon(v) + g \\ &\theta\big|_{t=0} = \theta^0 \text{ на } \Omega,\ \theta\big|_{\partial\Omega} = 0 \text{ на } [0,T];\end{aligned}$$

Здесь v, θ, p — двумерная скорость, давление и температура среды, $\varepsilon(v)$ — девиатор тензора напряжений, μ_0,, μ_1,, μ_2 и χ— характеристики вязкоупругих и теплопроводных свойств среды, f,g — зависящие от x ,t силы и источники тепла. Дано определение слабого решения задачи (1) и при определенных условиях доказано существование по крайней мере одного такого решения (теорема 2.1). Эта глава состоит из 5 разделов. В разделе 2.1 дана постановка задачи и формулируется основной результат главы в виде теоремы 2.1. В разделе 2.2 исследуются вспомогательные задачи и доказывается их разрешимость. Раздел 2.3 посвящен построению последовательности аппроксимирующих задач. Установлены определенные свойства их решений. В разделе 2.4. доказана сходимость решений аппроксимирующих задач. В разделе 2.5 доказывается теорема 2.1 с помощью результатов предыдущих разделов и предельного перехода.

В главе 3 изучается динамика термовязкоупругой среды с памятью. Здесь учитывается предыдущее состояние среды. Соответствующая система содержит задачу Коши для поля скорости в интегральной форме. При этом ввиду отсутствия достаточной гладкости поля скорости (оно отвечает слабому решению) последнее заменено более гладким (проведена регуляризация). Глава состоит из пяти разделов. В разделе 3.1 сформулирован основной результат (теорема 3.1): существование по крайней мере одного слабого решения соответствующей начально-краевой задачи. В разделе 3.2 доказывается слабая разрешимость вспомогательных задач. Раздел 3.3 посвящен построению и исследованию аппроксимирующих задач для модели динамики термовязкоупругой среды с памятью. В разделе 3.4 устанавливается сходимость решений аппроксимирующих задач. В разделе 3.5 завершается доказательство теоремы 3.1.

В главе 4 исследуется вопрос о существовании сильных решений начально-краевой задачи для системы Навье-Стокса-Фурье-Олдройда

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial v}{\partial t} + v_i \frac{\partial v}{\partial x_i} - \mathrm{Div}[\mu(\theta)\varepsilon(v)] + \nabla p = \\
&= f + \mu_0 \mathrm{Div} \int_0^t [\varepsilon(v)(s,x)]ds, \\
&\mathrm{div}\, v = 0 \text{ на } Q_T = [0,T] \times \Omega;
\end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \theta}{\partial t} + v_i \frac{\partial \theta}{\partial x_i} - \mathrm{Div}[k(\theta)\nabla\theta] = \mu(\theta)|\varepsilon(v)|^2 + \\
&+ \mu_0 \varepsilon(v) : \int_0^t [\varepsilon(v)(s,x)]ds + g \text{ на } Q_T; \\
&v\big|_{t=0} = v^0 \text{ на } \Omega,\ v\big|_{\partial\Omega} = 0 \text{ на } [0,T]; \\
&\theta\big|_{t=0} = \theta^0 \text{ на } \Omega,\ \theta\big|_{\partial\Omega} = 0 \text{ на } [0,T];
\end{aligned}$$

В разделе 4.1 формулируется теорема 4.1 о локальном по времени существовании и единственности сильного решения. Разделы 4.2 и 4.3 содержат доказательство Теоремы 4.1. В разделе 4.2 формулируются вспомогательные задачи, доказывается их локальная однозначная разрешимость и устанавливаются оценки решений. В разделе 4.3 завершается доказательство теоремы 4.1. В разделе 4.4 сформулирована основная теорема 4.4 главы о нелокальной по времени однозначной разрешимости задачи (2). Доказательство теоремы 4.4 проводится в разделах 4.5 и 4.6. Вначале рассматриваются вспомогательная система типа Олдройда, а затем уравнение теплопроводности с переменным коэффициентом теплопроводности и интегральной частью. Разрешимость соответствующих задач устанавливается с помощью перехода к операторной трактовке с последующим применением принципа сжимающих отображений. В разделе 4.6 завершается доказательство теоремы 4.4; при этом используется теорема Шаудера о неподвижной точке.

Отмечу замеченные в диссертации недостатки.

1. Имеется небольшое число пунктационных неточностей (см. например, стр. 8, 16, 34 и т.д.) .

2. В формуле (0.1) градиент давления следует убрать, т.к.слагаемое с давлением присутствует в реологическом соотношении (0.3).

3. В формуле (2.1) условие неразрывности нужно исключить, т.к. оно имеется в (2.2).

4. На стр. 65 имеется ссылка на неравенство 1.1, которое находится на стр. 27 и не имеет нумерованной ссылки, так что его трудно найти. При этом в нем выписан неверный показатель степени справа.

5. Во вложении на стр. 51 вместо $W_2^2(\Omega)$ должно быть $W_2^3(\Omega)$. Кроме того, символ принадлежности там нужно заменить символом вложения.

6. В правой части неравенства, расположенного на стр.76 после формулы (4.39), лапласиан не должен присутствовать.

7. На стр. 80 фразу "... тройка (v, p, θ) удовлетворяет уравнениям (4.43) - (4.44) в Q_T..."следовало бы уточнить, поскольку "удовлетворение"осуществляется по соответствующей интегральной норме.

8. В формулировке теоремы 4.5 начальное условие должно быть поставлено не на градиент, а на саму функцию.

Эти замечания не являются существенными и не влияют на общее благоприятное впечатление от всей работы в целом.

Подведу итог.

Диссертационная работа представляет собой логично выстроенное и завершенное научное исследование важного класса моделей неньютоновских жидкостей. Изложение результатов понятное и четкое. Диссертационная работа посвящена актуальной проблеме. Результаты диссертации являются новыми и обладают несомненной научной значимостью.

Работа соответствует требованиям ВАК РФ, предъявляемых к диссертациям, представленным на соискание ученой степени кандидата наук. Содержание диссертации соответствует паспорту специальности 01.01.02 — дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление.

Изложение результатов диссертации показывает хорошее владение автором современными математическими методами исследования сложных задач. Все основные результаты опубликованы своевременно; их достоверность не вызывает сомнений. Работа носит теоретический характер. Материалы диссертации могут быть использованы при исследовании новых классов термовязкоупругих сплошных сред, а также при чтении спецкурсов по математическим моделям динамики деформируемых сред при подготовке магистров по соответствующим специальностям.

Результаты диссертации опубликованы в 14 научных работах, 5 из которых принадлежат к перечню научных изданий, рекомендованных ВАК. Автореферат диссертации адекватно и полностью отражает содержание диссертации.

Считаю, что диссертационная работа Паршина Максима Игоревича «Исследование некоторых математических моделей движения термовязкоупругих жидкостей» полностью удовлетворяет п. 9 "Положения о присуждении ученых степеней"ВАК РФ, предъявляемых к кандидатским диссертациям по физико-математическим наукам, а ее автор, Паршин Максим Игоревич, заслуживает присуждения ему ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.02 —дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление.

Официальный оппонент
доктор физико-математических наук
(01.01.02 — дифференциальные уравнения),
доцент, профессор кафедры алгебры
и дискретной математики — Левенштам Валерий Борисович
Института математики, механики и — 1.03.2016
компьютерных наук имени И.И.Воровича
ФГАОУ ВО «ЮФУ»,
344090 г. Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова 8-а
email: vleven@math.rsu.ru
тел. 89064252776

Личную подпись Левенштама В.Б.
удостоверяю
Ученый секретарь Совета
Южного федерального университета
Мирошниченко О.С.